

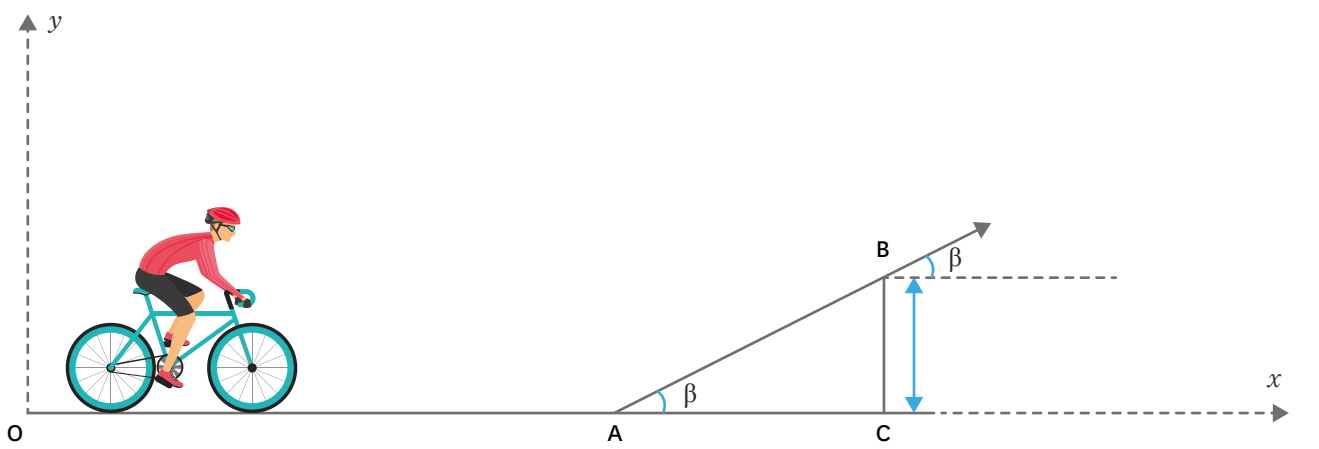
La mécanique newtonienne

Exercice corrigé : étude du mouvement d'un BMX

Un jeune homme et son BMX (vélo de cross) de masse totale $m = 70 \text{ kg}$ s'élancent sans vitesse initiale depuis l'origine O du repère à la date $t_0 = 0$ sur une portion rectiligne horizontale OA . On repère la position du système {jeune homme + BMX} à l'aide de son centre de gravité G .

Le cycliste arrive au point A à la date $t_A = 4,0 \text{ s}$ avec une vitesse $v_A = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Au point A , la piste forme une bosse faisant un angle $\beta = 30^\circ$ avec l'horizontale.

Le référentiel d'étude sera supposé galiléen. On prendra $g = 10 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$.



1 Schéma de la situation.

1^{re} situation : la phase d'élan.

1. Qu'est ce qu'un référentiel galiléen ?
2. Donner les caractéristiques du poids du système {jeune homme + BMX} et préciser l'origine de cette force.
3. Sur le trajet OA , le système est-il pseudo-isolé ? Justifier clairement.
4. Déterminer l'accélération moyenne du système sur ce trajet.
5. Sachant que sur la bosse le système maintient sa vitesse constante à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, est-il pseudo-isolé ?
6. Citer les forces qui s'exercent sur le système entre A et B .

Coup de pouce

- Pour ce type d'exercices, il ne faut pas hésiter à faire des schémas ou à compléter les schémas déjà fournis pour s'aider !

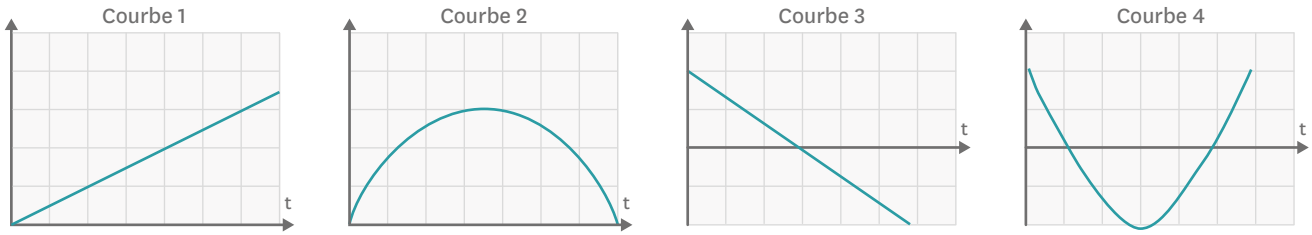
2^e situation : la phase de saut.

On considère maintenant le point C (point situé à la verticale de B) comme nouvelle origine du repère. Le jeune homme quitte la bosse en B à la date $t_b = 0$, nouvelle origine du temps. Il est alors considéré en chute libre jusqu'à ce qu'il soit de nouveau en contact avec le sol.

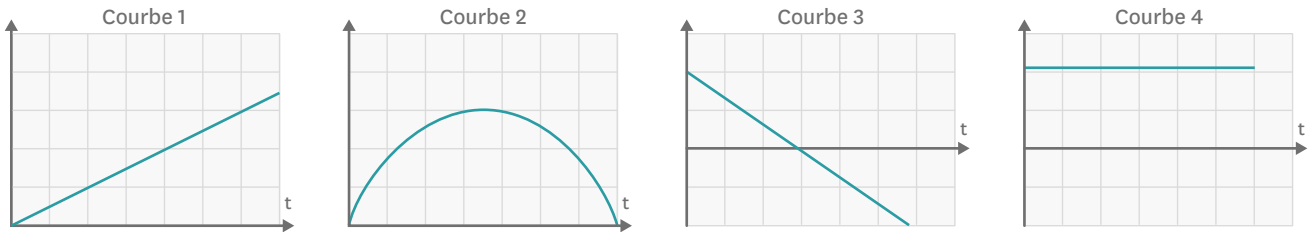
7. Comment se nomme la grandeur g ?
8. Donner les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v}_B du système au point B , au moment où il quitte la bosse.
9. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération du système lors du saut.
10. Montrer que les coordonnées du vecteur position \vec{CG} à chaque instant peuvent s'écrire :

$$\vec{CG} \begin{pmatrix} v_A \times \cos \beta \times t \\ -\frac{gt^2}{2} + v_A \times \sin \beta \times t + h \end{pmatrix}.$$

11. Choisir, sans le justifier, la courbe qui représente le mieux l'allure de la fonction $v_y(t)$:



12. Même question pour la fonction $x(t)$:



- 13. Déterminer l'expression littérale de l'altitude maximale atteinte pendant le saut.
- 14. Donner l'équation à résoudre pour trouver le moment auquel le BMX touche le sol (ne pas la résoudre).
- 15. D'après les données à votre disposition, est-il possible de faire les calculs numériques des questions 13 et 14 ?

MÉTHODE

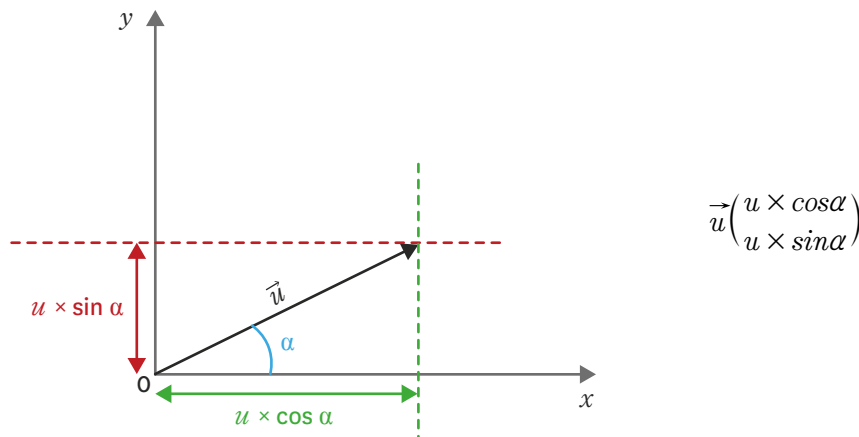
Avant de commencer la résolution d'un exercice de mécanique newtonienne, il faut s'assurer de connaître les lois de Newton, se rappeler les formules de trigonométrie et savoir intégrer une fonction simple.

- 1. 1^{re} loi de Newton = principe de l'inertie : dans un référentiel galiléen, tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme s'il est soumis à des forces qui se compensent. Un référentiel est dit galiléen si le principe de l'inertie y est vérifié.
- 2. 2^e loi de Newton = principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen, si un objet ponctuel est soumis à des forces extérieures, alors le vecteur « somme des forces » est égal à la dérivée par rapport au temps de son vecteur « quantité de mouvement » :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{dp}{dt}$$

- 3. L'accélération moyenne est déterminée par l'expression : $\|\vec{a}_{OM}\| = a_{OM} = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t} = \frac{\|\vec{v}_M - \vec{v}_O\|}{t_M - t_O}$.

- 4. Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur donné, après projection du vecteur sur l'axe des abscisses et des ordonnées, on obtient les coordonnées du vecteur :



5. Pour déterminer le vecteur accélération, on utilise le principe fondamental de la dynamique (voir 2.).
6. Un corps est dit en chute libre si la seule force qui s'exerce sur lui est son poids.
7. Pour déterminer le vecteur vitesse, il faut :
 - intégrer le vecteur accélération par rapport au temps ;
 - identifier les constantes (en utilisant les conditions initiales de la vitesse données dans l'énoncé ou sur un schéma).
8. Pour déterminer le vecteur position, il faut :
 - intégrer le vecteur vitesse par rapport au temps ;
 - identifier les constantes (en utilisant les conditions initiales pour une position donnée).
9. Donner les équations horaires du mouvement revient à donner les coordonnées du vecteur position ($x(t) = \dots$ et $y(t) = \dots$).
10. Pour donner l'équation de la trajectoire, il faut :
 - exprimer t en fonction de x à l'aide de l'équation $x(t)$;
 - remplacer les t dans l'équation horaire $y(t)$;
 - simplifier l'équation pour obtenir $y(x)$.

SOLUTION RÉDIGÉE

■ 1^{re} situation : la phase d'élan.

1. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.
2. Les caractéristiques du poids du cycliste sont :
 - sa direction : verticale ;
 - son sens : vers le bas ;
 - son intensité : $P = m \times g = 70 \times 10 = 7 \times 10^2 \text{ N}$;
 - son point d'application : centre de gravité du système $\{\text{jeune homme} + \text{BMX}\}$.

L'origine de la force « poids » est l'interaction gravitationnelle entre le système « jeune homme - BMX » et la Terre.

3. Sur le trajet OA le système accélère. Suivant la deuxième loi de Newton, les forces qui s'exercent sur lui ne se compensent pas : il n'est pas pseudo-isolé.
4. Pour le calcul de l'accélération moyenne du système sur la portion OA, ici la direction de la vitesse ne change pas et l'expression se simplifie donc en : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_A - v_O}{t_A - t_O} = \frac{10 - 0}{4 - 0} = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$.
5. Le mouvement sur la bosse est rectiligne et uniforme (vitesse constante), donc d'après la réciproque de la première loi de Newton, le système est soumis à des forces qui se compensent : il est pseudo-isolé.
6. Sur la bosse, les forces qui s'exercent sur le système $\{\text{jeune homme} + \text{BMX}\}$ sont :
 - son poids ;
 - la réaction normale du support ;
 - la force de propulsion du BMX ;
 - les forces de frottement.

■ 2^e situation : la phase de saut.

7. La grandeur g se nomme « champ de pesanteur » ou « accélération du champ de pesanteur ».
8. Les coordonnées du vecteur vitesse du système au point B est : $\vec{v}_B \begin{pmatrix} v_A \times \cos\beta \\ v_A \times \sin\beta \end{pmatrix}$.

9. D'après la deuxième loi de Newton on peut écrire : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ car la masse du système est constante.

Comme le système est considéré en chute libre après la bosse, par définition, la seule force s'exerçant sur lui est donc le poids :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \vec{P} &= m\vec{a} \\ \Leftrightarrow m\vec{a} &= m\vec{g} \\ \Leftrightarrow \vec{a} &= \vec{g} \\ \Leftrightarrow \vec{a} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10. En intégrant par rapport à la variable t le vecteur précédent on arrive à : $\vec{v} \begin{pmatrix} cste \\ -gt + cste' \end{pmatrix}$.

Afin de déterminer les constantes, on se place à l'origine des temps et ici $t_B = 0$, donc on a $\vec{v}_0 = \vec{v}_B$, alors :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} cste \\ -g \times 0 + cste' \end{pmatrix} = \vec{v}_B \begin{pmatrix} v_A \times \cos \beta \\ v_A \times \sin \beta \end{pmatrix}.$$

D'où : $cste = v_A \times \cos \beta$ et $cste' = v_A \times \sin \beta$.

En remplaçant on obtient : $\vec{v} \begin{pmatrix} v_A \times \cos \beta \\ -g \times t + v_A \times \sin \beta \end{pmatrix}$.

Pour obtenir le vecteur position du système, on intègre le vecteur vitesse : $\vec{CG} \begin{pmatrix} v_A \times \cos \beta \times t + cste \\ \frac{-gt^2}{2} + v_A \times \sin \beta \times t + cste' \end{pmatrix}$.

Or, à l'origine du temps le système est confondu avec le point B ; or le point B a pour coordonnées $(0 ; h)$, donc :

$$\vec{CG} \begin{pmatrix} v_A \times \cos \beta \times t \\ \frac{-gt^2}{2} + v_A \times \sin \beta \times t + h \end{pmatrix}.$$

Les équations horaires de la vitesse sont : $\begin{cases} v_x = v_A \times \cos \beta \\ v_y = -g \times t + v_A \times \sin \beta \end{cases}$

Les équations horaires du mouvement sont : $\begin{cases} x(t) = v_A \times \cos \beta \times t \\ y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_A \times \sin \beta \times t + h \end{cases}$

11. La fonction $v_y(t)$ est représentée par la courbe 3 car l'équation montre qu'il s'agit d'une droite dont le coefficient directeur est négatif, la droite est donc décroissante.
12. La fonction $x(t)$ est représentée par la courbe 1 puisqu'il s'agit de l'équation d'une droite passant par l'origine et dont le coefficient directeur est positif (c'est-à-dire croissante).
13. Lorsque le système arrive au sommet S de son saut alors la composante verticale de sa vitesse est nulle, on a donc $v_y = 0$. On peut donc écrire :

$$v_y(t_S) = 0 = -g \times t_S + v_A \times \sin \beta \Leftrightarrow t_S = \frac{v_A \times \sin \beta}{g}.$$

On va chercher l'altitude du point S, atteinte au temps t_S :

$$\begin{aligned} y(t_S) &= -\frac{g}{2} \times \left(\frac{v_A \times \sin \beta}{g} \right)^2 + v_A \times \sin \beta \times \left(\frac{v_A \times \sin \beta}{g} \right) + h \\ \Leftrightarrow y(t_S) &= -\frac{v_A^2 \times \sin^2 \beta}{2g} + \frac{v_A^2 \times \sin^2 \beta}{g} + h = \frac{v_A^2 \times \sin^2 \beta}{2g} + h. \end{aligned}$$

14. Lorsque le BMX retombe au sol, l'altitude est nulle donc on a $y(t) = 0$. L'équation à résoudre pour trouver le temps est donc :

$$-\frac{g}{2} \times t^2 + v_A \times \sin \beta \times t + h = 0.$$

15. Non, il est impossible d'effectuer ces calculs, il nous manque une donnée, l'altitude h .

Exercice similaire 1

Jeux Olympiques 2016 : épreuve de lancer de marteau féminin (inspiré du bac Polynésie 2015)

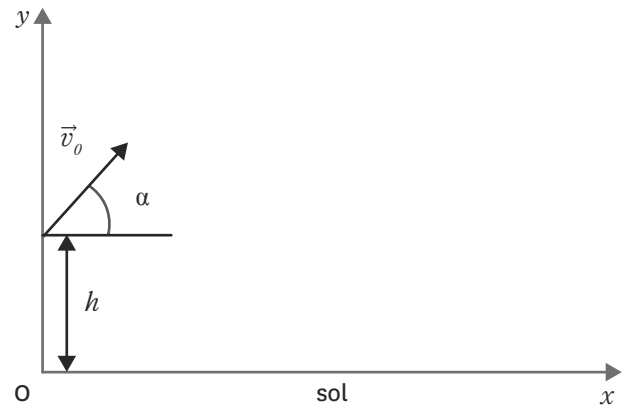


Crédit : Alamy / Photo12.

Le lancer du marteau est une discipline d'athlétisme qui consiste à lancer un boulet en acier de 7,257 kg pour les hommes et 4 kg pour les femmes le plus loin possible.

1 Alexandra Tavernier, athlète française en compétition à Beijing, 2015.

Athlète (pays)	Performances en m	Classement
Anita Wlodarczyk (POL)	82,29	Or
Wenxiu Zhang (CHN)	76,75	Argent
Sophie Hitchon (GBR)	74,54	Bronze
Betty Heidler (ALL)	73,71	4
Zalina Marghieva (ROU)	73,50	5
Amber Campbell (USA)	72,74	6
Hanna Malyshik (BIE)	71,90	7
Deanna Price (USA)	70,95	8
Joanna Fiodorow (POL)	69,87	9
Rosa Rodriguez (VEN)	65,18	10
Alexandra Tavernier (FRA)	65,18	11



2 Tableau récapitulatif des performances lors des JO de Rio de Janeiro en 2016.

3 Conditions initiales au lâcher du marteau.

Situation 1 : étude du mouvement du boulet avant le lâcher du marteau par l'athlète.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'athlète tourne sur elle-même autour d'un axe immobile vertical et que son bras est toujours tendu. Dans le référentiel terrestre, le mouvement du boulet est alors supposé plan et circulaire, accéléré dans un premier temps puis uniforme dans un deuxième temps.

- Rappeler la définition du vecteur accélération à partir du vecteur vitesse. En utilisant cette définition, justifier qualitativement l'existence d'une accélération lors d'un mouvement circulaire, même uniforme.
- Le vecteur sera-t-il ici centripète (dirigé vers le centre) ou centrifuge (dirigé à l'opposé du centre) ?
- En appliquant la seconde loi de Newton, justifier le fait que, dans le cas du mouvement circulaire uniforme, le poids du boulet soit négligeable devant la force exercée par le câble sur le boulet. La vitesse v est égale à $26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, l'intensité de la pesanteur g à $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on prendra comme valeur pour le rayon R de la trajectoire $2,2 \text{ m}$.

Rappel

- Pour un mouvement circulaire uniforme $a = \frac{v^2}{R}$.

Situation 2 : étude du mouvement du boulet après le lâcher du marteau par l'athlète.

Pour cette étude, on associe au référentiel terrestre le repère (Ox, Oy) . On négligera dans cette partie les actions du câble et de la poignée du marteau.

La trajectoire décrite par le boulet dépend de la valeur v_0 de la vitesse du boulet au moment de l'envol, de l'angle d'envol α et de la hauteur h du boulet au moment du lâcher à l'instant initial $(t = 0)$.

On se référera au schéma en doc. 3.

4. Montrer que les équations horaires du mouvement du boulet s'écrivent :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \text{ et } y(t) = -gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + h.$$

On admet que la trajectoire du boulet s'écrit :

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \times \tan \alpha + h.$$

5. En utilisant les données numériques relatives au lancer, déterminer le classement que l'athlète aurait obtenu aux Jeux Olympiques de Rio 2016.

6. En utilisant l'une des équations horaires du mouvement, déterminer au bout de combien de temps le marteau touche le sol.

Données

- le boulet du marteau est assimilé à un point matériel de masse $m = 4,0 \text{ kg}$;
- on négligera toute action de l'air ;
- intensité de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- vitesse initiale du boulet : $v_0 = 26,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- angle d'envol : $\alpha = 45^\circ$;
- hauteur du boulet au moment du lâcher : $h = 3,0 \text{ m}$.

Exercice similaire 2 Étude d'un saut à ski

Un skieur de masse $m = 75 \text{ kg}$ (avec son matériel), assimilé à un point matériel noté G, s'élance du point S et arrive sur la partie horizontale de la piste précédent le saut, il arrive au point A avec une vitesse de $v_A = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



Crédit : Alamy / Photo12.

1^{re} étude : avant le saut.

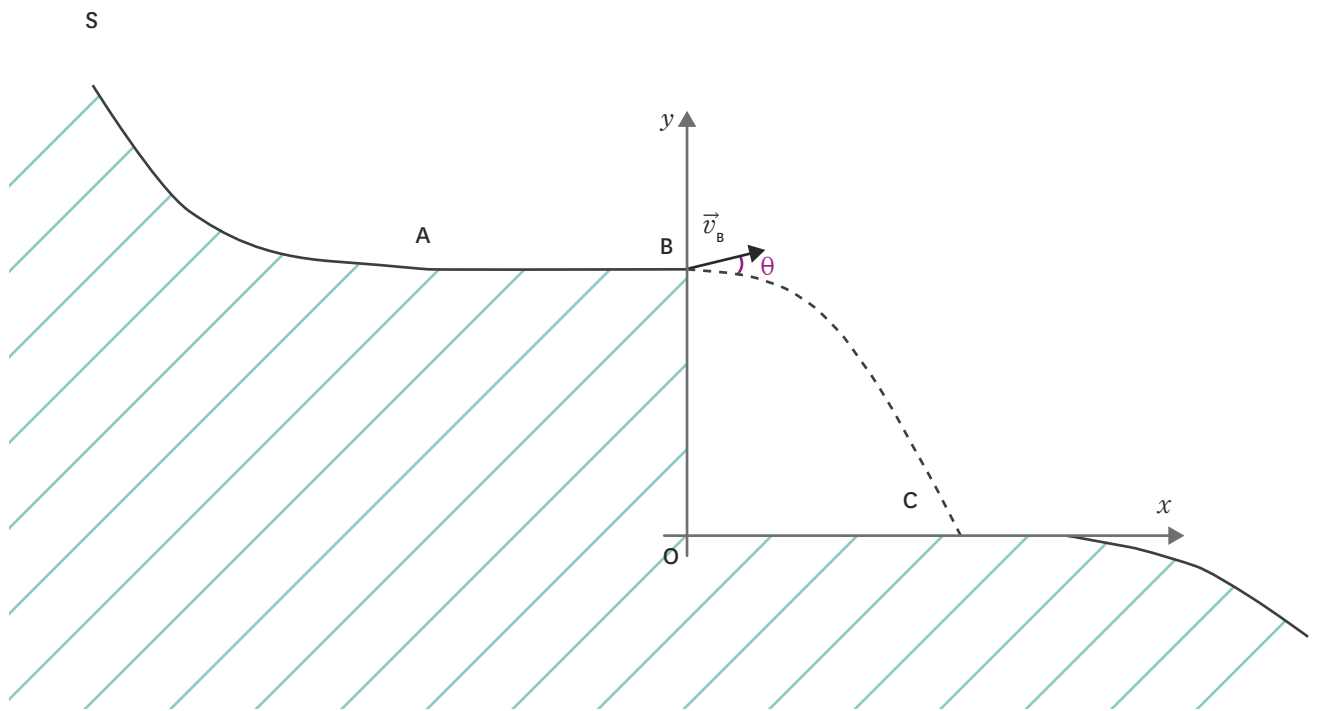
Le skieur arrive avec une vitesse $v_B = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ au point B.

1. Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement du skieur ?
2. Le système étudié peut-il être considéré comme pseudo-isolé ?
3. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le skieur entre le point A et le point B.

1 Épreuve de saut à ski. Aux Jeux Olympiques de 2018 en Corée du Sud, les épreuves de saut à ski ont eu lieu du 12 au 20 février au centre de saut à ski d'Alpensia, près de Pyeongchang. Le but pour ces athlètes est d'aller le plus loin possible avec l'énergie cinétique accumulée pendant la descente d'une rampe spécialement conçue pour cette épreuve.

Données

- Intensité de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



2 Schéma de la situation.

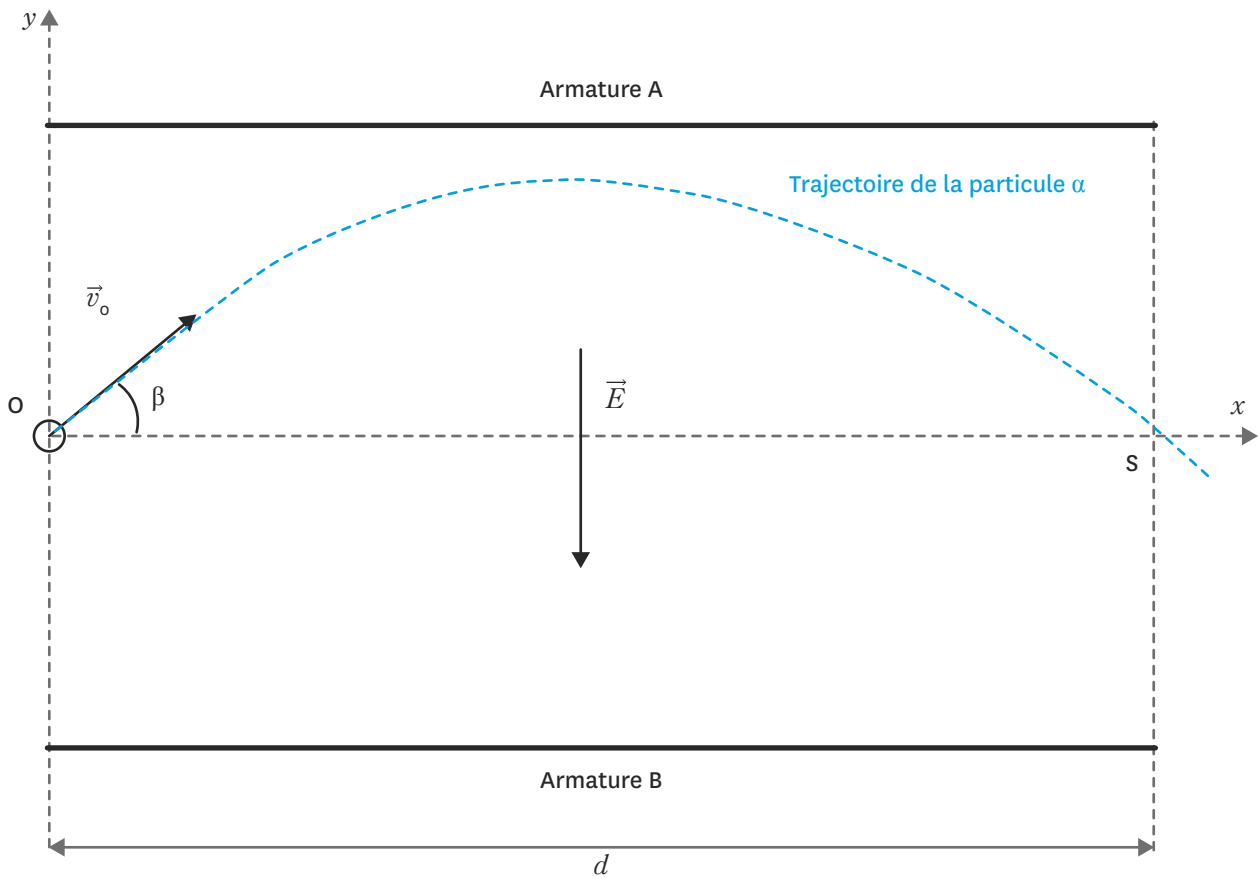
2^e étude : après le saut.

On ne tiendra pas compte dans cette partie des actions de l'air. On prendra $t = 0$ au point B. La distance $OB = 30$ m.

4. Peut-on considérer que le skieur est en chute libre après le tremplin ? Justifier votre réponse.
5. Établir les équations horaires du mouvement de G dans le repère donné.
6. En déduire l'équation de la trajectoire.
7. Pour quelle valeur de l'angle θ la longueur x va-t-elle être maximale ? (Aucun calcul n'est attendu.)
8. On prendra ici $\theta = 7^\circ$. Calculer la durée du saut.
9. Calculer la longueur x de ce saut.

Problème résolu

Étude de la trajectoire d'une particule dans un champ électrique uniforme



1 Étude du mouvement dans un champ électrique.

Les scientifiques ont parfois besoin pour leurs expériences de faire entrer en collision certaines particules. Il faut pour cela pouvoir « gérer » la trajectoire de ces particules, pouvoir les dévier par exemple. Dans ce cas, il est possible d'utiliser un condensateur.

Une particule α est émise avec une vitesse v_0 à l'intérieur d'un condensateur à armatures planes telles que $q_B = -q_A$ et dans lequel règne un champ électrique E uniforme.

Données

- $m(\alpha) = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$;
- $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

1. De quoi est composée une particule α ?
2. Quel est le signe de la charge portée par l'armature A ? Justifier.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse initial de la particule dans le repère du schéma ci-dessous.
4. Déterminer l'expression du vecteur de la force électrique \vec{F}_{el} que subit la particule sachant que sa charge est $+2e$.
5. Montrer que le vecteur accélération que subit cette particule peut s'écrire : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-2eE}{m} \end{pmatrix}$.
6. En déduire les équations horaires de la position de la particule.
7. Montrer que l'équation de la trajectoire est alors : $y(x) = \frac{-eE}{m \times v_0^2 \times \cos^2 \beta} \times x^2 + \tan \beta \times x$.
8. Déterminer l'expression littérale de la vitesse initiale v_0 que doit posséder la particule pour ressortir du condensateur plan en passant précisément par le point S. Puis la calculer pour $d = 6 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$ et $E = 6 \times 10^4 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.

Rappel

- une particule α est un noyau d'Helium ${}^4_2\text{He}$.